Trabajo Práctico Nro. 4

Sucesiones y Series Numéricas.

1. Analizar la convergencia de las siguientes sucesiones reales:

   (a) $a_n = 3 - \dfrac{1}{n}$ (b) $a_n = (-1)^n \dfrac{5}{n}$ (c) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

   (d) $a_n = \dfrac{n^2}{2}$ (e) $a_n = \dfrac{\operatorname{sen}(2n)}{n}$ (f) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^3+2}}{n^2-2}$

   (g) $a_n = \dfrac{n!}{(n+1)!}$ (h) $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$ (i) $a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}\ , \quad a \geqslant b \geqslant 0$

   (j) $a_n = \cos(n\pi)$ (k) $a_n = \dfrac{\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2})}{n^2}$ (l) $a_n = \dfrac{n^k}{2^n}\ , \quad k \in \mathbb{N}$

2. Hallar, si existe, el límite de las siguientes sucesiones de números complejos:

   (a) $z_n = \sqrt[n]{n} + i\,r\ , \quad r \in \mathbb{R}$ (b) $z_n = \dfrac{n}{n+i3} - \dfrac{i\,n}{n+1}$

   (c) $z_n = \dfrac{1+2n^2}{n^2} - i\dfrac{n-1}{n}$ (d) $z_n = i^n$

   (e) $z_n = n\,i^n$ (f) $z_n = \left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n$

   (g) $z_n = \operatorname{sen}(n\,i)$ (h) $z_n = (\cos t + i \operatorname{sen} t)^n\ , \quad t \in \mathbb{R}$

3. Encontrar dos subsucesiones convergentes de cada una de las sucesiones:

   (a) $\left\{e^{n\pi i/3}\right\}$ (b) $\left\{i^{2n}\right\}$

4. Sea $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$ una sucesión convergente. Probar que:

   (i) $\{z_n\}$ es una sucesión acotada,
   (ii) $\{|z_n|\}$ es una sucesión convergente.

   En ambos casos, dar un contraejemplo de la recíproca.

5. Analizar la convergencia de las siguientes series reales utilizando el criterio de comparación:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\,k}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+2^k}$ (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+\cos(k)}{k}$

6. Analizar la convergencia de las siguientes series reales mediante el criterio de D'Alembert:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k\,2^k}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{100^k}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4k+1}{3^k}$ (d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{(k+1)!}$

7. Analizar la convergencia de las siguientes series reales mediante el criterio de Cauchy:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{k^k}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{10^k}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+k}{k}\right)^{k^2}$ (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)^k}{k}$

8. Determinar el carácter de las siguientes series reales alternadas:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{2k+3}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{3^k}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(k\pi)}{\sqrt{k}}$ (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{k}{6^k}$

9. Analizar cuáles de las siguientes series reales son absolutamente convergentes, cuáles condicionalmente convergentes y cuáles divergentes. En los casos convergentes en que sea posible, calcular a qué converge.

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2^k$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)$

   (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{2}{3}\right)^k$ (e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt[k]{k_0}}{2}$ (f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{4k^2-3}$

   (g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3+k+2}$ (h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k\,3^k}$ (i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{k^k}$

   (j) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2k+1}}$ (k) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln(k+1))^k}$ (l) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{2k+1}$

   (m) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k}{3k+1}\right)^k$ (n) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ (o) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^k\,k!}{k^k}$ $\quad r>0$

10. Analizar la convergencia absoluta y condicional de las siguientes series complejas. Si es posible, calcular a qué converge.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n-i2^n}{3^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+3i)^n}{5^n}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2i^n}{5+in^2}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\cos(\frac{n\pi}{5})+i\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{5})\right)$

   (g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}e^{in\theta}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in\theta}}{n}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in\theta}}{n^2}$ $\quad (\theta\in[0\,,2\pi))$

11. Dar ejemplos de una serie compleja (no real):

   (i) acotada pero que no converge,
   (ii) que converge sólo condicionalmente.

12. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ una serie compleja convergente. Probar que:

    (i) $\{\operatorname{Re} z_n\}$ y $\{\operatorname{Im} z_n\}$ son sucesiones acotadas,

    (ii) si $\operatorname{Re} z_n \geq 0$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{Re} z_n)^2$ es convergente,

    (iii) si $|\operatorname{Arg} z_n| \leq \theta < \pi/2$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge absolutamente.

Sucesiones y Series de Funciones.

13. Calcular $\lim_{n \to \infty} f_n(z)$ para $z \in \Omega$ siendo:

    (a) $f_n(z) = \dfrac{1}{n} e^{-n|z|}$ $\qquad \Omega = \mathbb{C}$

    (b) $f_n(z) = \dfrac{z^3}{n^2 + z^2}$ $\qquad \Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \quad \Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$

    (c) $f_n(z) = e^{-n^2 z}$ $\qquad \Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq r\}\ (r > 0), \quad \Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\}$

    ¿En qué casos la convergencia es uniforme?

14. Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^z}$ es absolutamente convergente en $\operatorname{Re} z > 1$.

15. Mostrar que $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-inz}$ converge absoluta y uniformemente en $\operatorname{Im} z \leq -r\ (r > 0)$. Determinar a qué función converge la serie anterior y deducir a qué converge $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-inz}$, $\forall z : \operatorname{Im} z < 0$.

Desarrollos en Series de Potencias.

16. Determinar el dominio de convergencia en $\mathbb{C}$ de las series:

    (a) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n z^n, \quad a \in \mathbb{C}$ $\qquad$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z-i)^n}{n^2}$ $\qquad$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2(z+1)^n}{3n+1}$

    (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} z^{kn}, \quad k \in \mathbb{N}$ $\qquad$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n} z^n$

17. (a) Dada $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{a^2 + n^2}$ con $a > 0$, hallar la región de convergencia de $f(z)$ y probar que la convergencia es uniforme en la región cerrada.

    (b) Justificar que f es una función holomorfa y encontrar su derivada. ¿Es, la serie resultante al derivar término a término la f, uniformemente convergente en la región cerrada?

18. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ para los cuales la serie $\displaystyle\sum_{n=30}^{\infty} \left(\frac{z}{z+1}\right)^n$ es convergente.

19. (a) Desarrollar las siguientes funciones en serie de Taylor alrededor del punto z_0 indicado:

    (i) $\exp z \quad z_0 = 0, \quad z_0 = \pi\, i$ (ii) $\dfrac{1}{z-1} \quad z_0 = 0, \quad z_0 = i$

    (iii) $\operatorname{sen} z \quad z_0 = 0, \quad z_0 = \pi$

    (b) A partir de (a), obtener el desarrollo en serie de Taylor centrado en z_0 de:

    (i) $\operatorname{sh} z \quad z_0 = \pi\, i$ (ii) $\dfrac{1}{(z-1)^2} \quad z_0 = 0$

    (iii) $\cos z \quad z_0 = \pi$ (iv) $\operatorname{Ln}(\frac{1}{z-1}) \quad z_0 = i$

    (c) Desarrollar las siguientes funciones en serie de Taylor alrededor del punto z_0 indicado, recurriendo a un cambio de variable conveniente:

    (i) $\operatorname{sen}(2z+1) \quad z_0 = 0$ (ii) $\operatorname{sen} z \quad z_0 = \frac{\pi}{4}$ (iii) $\exp(z^2) \quad z_0 = 0$

20. (a) Desarrollar las siguientes funciones racionales en serie de Taylor alrededor del punto z_0 indicado, en base al desarrollo de una serie geométrica.

    (i) $\dfrac{1}{3z+2} \quad z_0 = 0$ (ii) $\dfrac{z}{z^2-1} \quad z_0 = 0$

    (iii) $\dfrac{1}{(3z+2)(z-1)} \quad z_0 = 0$ (iv) $\dfrac{1}{z^2-1} \quad z_0 = \dfrac{1}{2}$

    (b) Obtener el valor de la derivada de orden 10 de $f(z) = \dfrac{z}{z^2-1}$ en $z_0 = 0$.

21. Determinar si la función $\operatorname{Arg}(z)$ admite un desarrollo de Taylor en discos abiertos del plano complejo y, en caso afirmativo, caracterizar tales discos.

22. Sea $f(z)$ holomorfa en $\mathbb{C}$, para la que se sabe que existe una constante $M > 0$ y un entero $k \in \mathbb{N}$, tal que se verifica: $|f(z)| \leq M|z|^k$ para todo z en $\mathbb{C}$. Probar que $f(z)$ es un polinomio de grado no mayor que k, nulo en $z = 0$.
    (Sugerencia: probar que $f^{(n)}(a) = 0\ \forall a \in \mathbb{C}$, y para todos los enteros $n > k$, usando la F.I.C. para las derivadas de una función holomorfa, y acotando las integrales).

23. (a) Mostrar que si f es una función entera que coincide con un polinomio sobre el intervalo real $[0, 1]$ entonces f es un polinomio en $\mathbb{C}$.

    (b) Probar que si $F(z)$ es derivable para $\operatorname{Re}(z) > 0$, y si $F(x) = \dfrac{1}{x}$ para $x > 0$, entonces $F(z) = \dfrac{1}{z}$ para $\operatorname{Re}(z) > 0$.

    (c) Sean $f(z) = e^{1/z} - 1$ y $z_n = 1/2\pi n i$. Se tiene que: $z_n \to 0$ y que $f(z_n) = 0$ pero f no es idénticamente nula. ¿Contradice esto el Principio de Identidad?

24. (a) Supongamos que para $R_1 < R_2$, $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(z-z_0)^j$ converge en $|z-z_0| < R_2$ y $\sum_{j=1}^{\infty} a_{-j}(z-z_0)^{-j}$ converge en $|z-z_0| > R_1$. Mostrar que existe una función holomorfa en $R_1 < |z-z_0| < R_2$ cuyo desarrollo en serie de Laurent es $\sum_{-\infty}^{\infty} a_j(z-z_0)^j$.

    (b) Analizar si $f(z)$ define una función holomorfa en un abierto, siendo:

    (a) $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{2^n}$ (b) $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{(3n+1)^2}$

    En caso afirmativo, hallar el máximo dominio de holomorfía y dar la expresión de su derivada.

25. Hallar el desarrollo en serie de Laurent en potencias de z para las siguientes funciones, de modo que sea convergente en los puntos z_0 indicados. Especificar el dominio de convergencia de la serie calculada.

    (i) $f(z) = \dfrac{1}{z^2-2z-3}$ $z_0 = 2$ (ii) $f(z) = \dfrac{2z+1}{z^2-6z+5}$ $z_0 = -8$

    (iii) $f(z) = \dfrac{3z-1}{z^2-4z+3}$ $z_0 = -2$ (iv) $f(z) = \dfrac{2z^2}{2z^2-5z+2} + \operatorname{sen}\left(\dfrac{3}{z^2}\right)$ $z_0 = -i$

26. Hallar el desarrollo en serie de Laurent de $\dfrac{1}{z^2-1}$ en las regiones que se indican y especificar la correspondiente región de convergencia:

    (a) en el infinito,

    (b) alrededor de $z_0 = i$,

    (c) en $|z+1| > 1$.

27. Obtener todos los desarrollos de Laurent y determinar la región de validez de cada uno, para:

    (i) $f(z) = \dfrac{z-1}{(z+1)\,z\,(z-2)}$ en potencias de $(z+1)$,

    (ii) $f(z) = \dfrac{(z+1)e^{\left(\frac{1}{z-i}\right)}}{z(z-i)}$ en potencias de $(z-i)$.

28. Hallar el desarrollo en serie de Laurent de la forma $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ de la función $f(z) = \dfrac{z}{(2z-1)(2z^{-1}-1)}$ de modo que la serie numérica $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ sea convergente.

29. Hallar el desarrollo en serie de Laurent de la forma $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ de la función $f(z) = \dfrac{1}{(4z+1)(z-2)}$ de modo que

    (a) la serie numérica $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n a_n$ sea absolutamente convergente,

    (b) la serie numérica $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 a_n$ sea absolutamente convergente,

    y calcular estas dos series numéricas.

30. ¿Cuáles de las siguientes funciones admiten desarrollo en serie de Laurent en una vecindad de 1 en potencias de $(z-1)$? En caso negativo, decir por qué no. En caso afirmativo, describir la región de convergencia y analizar si se reduce a un desarrollo sólo con potencias no negativas.

    (i) $\operatorname{Log}(z-1)$ (ii) $\operatorname{cotg}(\pi z)$ (iii) $\sqrt{z-1}$

    (iv) $e^{\frac{1}{z-1}}$ (v) $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi z)}{z-1}$ (vi) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{z-1}\right)$

31. ¿Admite la función $f(z) = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{z}}}$ un desarrollo de Laurent en potencias de z? Caracterizar dicho desarrollo y determinar su región de validez.

32. Demostrar que una función holomorfa en todo el plano complejo ampliado es constante.